Tentamen Vectoranalyse

9 juli 2009, 9–12 uur (Examenhal)

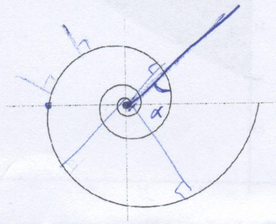
Dit tentamen bestaat uit de volgende **vier** opgaven. Het maximale aantal punten is per opgave aangegeven. Je krijgt 10 punten gratis.

De *voorlopige cijfers* zullen binnenkort in het gradebook van Nestor worden opgenomen. Hieraan kunnen geen rechten ontleend worden. De definitieve cijfers worden begin augustus bekend gemaakt.

Opgave 1 (25 pt.)

7

We bekijken de logaritmische spiraal met parametrisering $c(t) = (e^t \cos t, e^t \sin t)$ voor $-\infty < t \leq 0$:



5 1. Bereken de lengte van $c(t)$ voor $t \in [-1, 0]$.

10 2. Toon aan, dat

(i) de spiraal de oorsprong oneindig vaak omcirkelt zonder hem te bereiken, terwijl

(ii) de lengte van de spiraal van het punt $P_0 = c(0)$ tot de oorsprong eindig is.

10 3. Laat $\alpha(t)$ de hoek zijn waaronder de spiraal de halfrechte (halve lijn) vanuit de oorsprong naar $c(t)$ snijdt.

1. Bereken $\alpha(-\pi)$.
2. Laat zien dat $\alpha(t)$ constant is.

5 **Opgave 2 (20 pt.)**

Zij $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ de functie gedefiniëerd door

$$\tfrac{1}{3}(x + y + z) - \sqrt[3]{xyz}.$$

Het gebied $D \subset \mathbb{R}^3$ is gegeven door $D = \{(x, y, z) \mid x + y + z = 1 \text{ en } x, y, z \geq 0\}$.

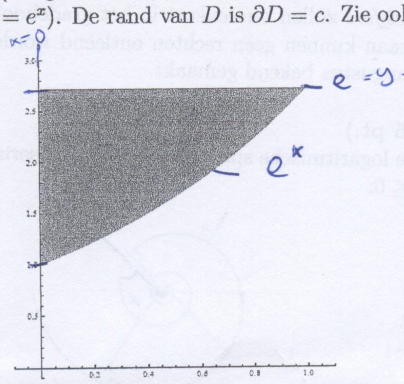
4

10 1. Bepaal de waarde(n) van f op de rand van D.

10 2. Bepaal de globale minima van f op het gebied D.

Z.O.Z.

15 **Opgave 3 (25 pt.)**
De stelling van Green kan ook gebruikt worden om de inhoud van een lastig volume te berekenen. In deze opgave bereken je het volume onder de functie $f(x,y) = 1+1/\log y$ boven het domein D dat gegeven wordt door $D = \{(x,y,z) \mid x \geq 0, y \leq e, y \geq e^x\}$ (dit gebied wordt dus ingesloten door de lijnen $x = 0$ en $y = e$ en de kromme $y = e^x$). De rand van D is $\partial D = c$. Zie ook de figuur.



1. Formuleer de stelling van Green, en gebruik deze om te laten zien dat
$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \oint_c \left(-y\,dx + \frac{x}{\log y}\,dy\right).$$

$\frac{1}{2}$ 2. Parametriseer c. (Je krijgt drie stukjes, één voor elk glad deel van c.)

$\frac{1}{2}$ 3. Bereken de integraal in onderdeel 1, en daarmee de inhoud van het volume.

Opgave 4 (20 pt.)
In $\mathbb{R}^3$ is een volume V gegeven met inhoud I, waarvan de rand een oppervlak S is. Gegeven zijn twee vectorvelden $\mathbf{F}$ en $\mathbf{G}$ op $\mathbb{R}^3$, die gelijk zijn in elk punt van S.

1. Toon aan dat $\iint_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} = \iint_S \mathbf{G}\cdot d\mathbf{S}$.

5 2. Druk $\iint_S \mathbf{G}\cdot d\mathbf{S}$ uit in I m.b.v. de stelling van Gauß, waarbij $\mathbf{G}$ gegeven is door $\mathbf{G} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$.

5 3. Laat nu S het boloppervlak zijn met straal 1 en middelpunt $(0,0,0)$. Bereken $\iint_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S}$, waarbij $\mathbf{F}$ gegeven is door $\mathbf{F} = \frac{x}{r^3}\,\mathbf{i} + \frac{y}{r^3}\,\mathbf{j} + \frac{z}{r^3}\,\mathbf{k}$ met $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$.